Exercice1

1) $f(x)=x^5-5x^2+2-\frac{3}{x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f admet une primitive F sur $\mathbb{R}^*$ et $F(x)=\frac{x^6}{6}-5\frac{x^3}{3}+2x+\frac{3}{x}+k, k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2}=x^2-\frac{1}{x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}^* \Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}^*$ et $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+k, k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=(2x-1)(x^2-x-4)^8$

f est continue sur (fonction polynôme)

Donc f admet une primitive F sur

On a : $f(x)=(x^2-x-4)'(x^2-x-4)^8$

Donc $F(x)=\frac{(x^2-x-4)^9}{9}+k, k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)$

f Continue sur $[0,\infty[\Rightarrow f$ admet une primitive sur $[0,\infty[$ et $f(x)=x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}-2$

$=x-\sqrt{x}-2$

$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+k \ ; k\in IR$

5) $f(x)=(x^2-1)(x^3-3x+5)$

Posons $U(x)=x^3-3x+5$

On a $U'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

$\Rightarrow x^2-1=\frac{1}{3}U'(x)$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}U'(x)U(x)$

f Continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et $F(x)=\frac{1}{3}\frac{U^2(x)}{2}+k, k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{6}(x^3-3x+5)^2+k, k\in\mathbb{R}$

6) $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=\frac{1}{4}\frac{(8x+4)}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$

$=\frac{1}{4}\frac{(4x^2+4x+5)'}{\sqrt{4x^2+4x+5}} \quad =\frac{1}{2}\frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$

Avec $U(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}$

Or $4x^2+4x+5>0$ car $\Delta=16-80<0$

(Ou bien: $4x^2+4x+5=(2x+1)^2+4>0$)

Donc $F(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{4x^2+4x+5})+k; k\in IR_+$

7) $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}$

f Fonction rationnelle $\Rightarrow f$ continue sur $Df=\mathbb{R}$

Car : $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$

(Ou bien on a : $\Delta=4-20<0$)

$\Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et on a

$f(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2+2x+5)'}{(x^2+2x+5)^2} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{U'(x)}{(U(x))^2}\right)$

Avec $U(x)=x^2+2x+5$

$\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{2(x^2+2x+5)}+k, k\in\mathbb{R}$

8) $f(x)=(2x+1)^3$: f polynôme

$\Rightarrow f$ Continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ .Posons $U(x)=2x+1$

On a $U'(x)=2$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}U'(x)U(x)^3$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\frac{U(x)^4}{4}+k, k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{U(x)^4}{8}+k, k\in\mathbb{R}$

$=\frac{(2x+1)^4}{8}+k$

9) $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$, continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$.

$F(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+k, k\in\mathbb{R}$

10) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cos(\sqrt{x^2-1})$

On a : $x^2-1>0$ pour $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[=I$

Posons $U(x)=\sqrt{x^2-1} \Rightarrow U'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$x\mapsto U(x)$ est continue sur I et $U(I)=]0,+\infty[$

$\cos(X)$ est continue sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow \cos(\sqrt{x^2-1})$ est continue sur I.

$x \mapsto \frac{x}{U(x)}$ est continue sur I. $\Rightarrow f$ est continue sur I

(Produit de deux fonctions continues).

$\Rightarrow f$ Admet une primitive F sur I et f à la forme $x \mapsto U'(x) \times \cos[U(x)]$

$F(x) = \sin(\sqrt{x^2-1}) + k, k \in \mathbb{R}$.

11) $f(x) = \cos x \sin^3 x$. continue sur $\mathbb{R}$

(Produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

$f(x) = (\sin x)'(\sin x)^3$.

$F(x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + k, k \in \mathbb{R}$.

12) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{\frac{1}{3}(1+x^3)'}{\sqrt{1+x^3}}$

On a $x^3+1 = (x+1)(\underbrace{x^2-x+1}_{>0 \ car \ \Delta<0})$

$x^3+1 \succ 0$ *pour* $x+1 \succ 0 \Rightarrow x \succ -1$

Remarque : primitive de $\frac{U'}{\sqrt{U}}$ est $2\sqrt{U}+c$.

$\Rightarrow f$ Admet une primitive F sur $]-1,+\infty[$ et

$F(x) = \frac{1}{3} * 2\sqrt{1+x^3} + k, k \in \mathbb{R}$.

$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + k, k \in \mathbb{R}$.

Exercice2

$f(x) = 4x^3$.

$$x \mapsto \begin{cases} F(x) = x^4 + 2 \rightarrow si(x \geq 0) \\ F(x) = x^4 - 2 \rightarrow si(x < 0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = -2 \neq F(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 2 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow F$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

F est discontinue en $0 \Rightarrow F$ est discontinue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow F$ n'est pas une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice3

$f(x) = (\cos x) \times (2\sin x - 1)$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ (produit de deux fonctions continues)

$\Rightarrow f$ admet au moins une primitives sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(x) = (\sin x)'(2\sin x - 1)$

$$= \frac{1}{2}(2\sin x - 1)'(2\sin x - 1)$$

$F(x) = \frac{1}{4}(2\sin x - 1)^2 + k, k \in \mathbb{R}$

$F(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}(2\sin\frac{\pi}{2} - 1)^2 + k = \frac{1}{4} + k = 0$

$\Rightarrow k = -\frac{1}{4}$

Donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{4}(2\sin x - 1)^2 - \frac{1}{4}, x \in \mathbb{R}}$

Exercice4

$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2, x \in \mathbb{R}$

1) on a : $\cos^3 x = \cos x(\cos^2 x)$

$= \cos x(1 - \sin^2 x)$

$= \cos x - \cos x \sin^2 x$

$\Rightarrow f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x - 3\cos x + 2$

$= -\cos x \sin^2 x - 2\cos x + 2$

2) $f(x) = -(\sin x)'\sin^2 x - 2(\sin x)' + 2$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x + 2x + k, k \in \mathbb{R}$.

$F(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{3}(-1)^3 - 2(-1) + 2(-\frac{\pi}{2}) + k = 0$

$= \frac{1}{3} + 2 - \pi + k$

$= \frac{7}{3} - \pi + k = 0 \Rightarrow k = \pi - \frac{7}{3}$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x + 2x + \pi - \frac{7}{3}$

Exercice5

$f(x)=5\sin x+3\sin^3 x.x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=5\cos x+9\cos x\sin^2 x.$

$f''(x)=-5\sin x+9(-\sin^3 x+2\cos^2 x\sin x)$

$\Rightarrow 3f(x)+f''(x)=10\sin x+18\sin^2 x\cos x$

$\Rightarrow 3f(x)=-f''(x)+10\sin x+6\times(3\sin x)\sin^2 x$

Passons à la primitive :

$3F(x)=-f'(x)-10\cos x+6\sin^3 x+k,k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow F(x)=-\frac{1}{3}f'(x)-\frac{10}{3}\cos x+2\sin^3 x+k,k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow F(x)=\frac{5}{3}\cos x-3\cos x\sin^2 x-\frac{10}{3}\cos x+2\sin^3 x+k,k\in\mathbb{R}$

Donc on aura :

$$\boxed{F(x)=-5\cos x-3\cos x\sin^2 x+2\sin^3 x+k,k\in\mathbb{R}}$$

Exercice6

$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x}{(x-1)^2},x\in\mathbb{R}-\{1\}$

1) $x^3-3x^2+3x=(x-1)^3+1$

$\Rightarrow f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$

$=x-1+\frac{1}{(x-1)^2}$

D'où $b=-1$ et $a=c=1$

2éme méthode :

$ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x-1)^2+c}{(x-1)^2}$

$=\frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+c}{(x-1)^2}$

$=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x+b+c}{(x-1)^2}$

Par identification on a :

$$\begin{cases}a=1\\ b-2a=-3\Rightarrow b=-1\\ a-2b=3\\ b+c=0\Rightarrow b=-c=-1\end{cases}$$

Donc $b=-1$ et $a=c=1$

$$\boxed{\Rightarrow f(x)=x-1+\frac{1}{(x-1)^2}\ \forall x\in IR-\{1\}}$$

2) f continue sur $]1,+\infty[$ donc f admet au moins une primitive F telle que :

$$\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{x-1}+k,k\in\mathbb{R}},x\in]1,+\infty[$$

Exercice7

$f(x)=\sin 3x\times\cos x\qquad x\in\mathbb{R}$

1) On sait que :

$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\Rightarrow \sin 4x+\sin 2x=2\sin\frac{6x}{2}\cos\frac{2x}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[\sin 4x+\sin 2x]=\sin 3x\cos x$

2) f continue sur IR donc f admet une unique primitive F qui s'annule en 0.et on a :

$F(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+k$ et $F(0)=0$

Or $F(0)=-\frac{3}{8}+k\Rightarrow k=\frac{3}{8}$

D'où $\boxed{F(x)=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{3}{8}},x\in\mathbb{R}$

Exercice8

Partie A :

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in \square_+$

1) f continue sur $\square_+$ donc f admet une unique primitive F qui prend la valeur 0 en.0 ;

$$F'(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}, x\in \square_+$$

2) $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[: K(x)=F(tgx)$

a) Posons $U(x)=tgx$ (fonction tangente)

On a : tgx est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

et $U\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=[0,+\infty[$ et F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Conclusion :

K est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$K'(x)=U'(x).F'(U(x))$

$=(1+tg^2x)f(tgx)$

$=(1+tg^2x)\times\dfrac{1}{1+tg^2x}=1$

$\Rightarrow K'(x)=1;\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

b) */ $K'(x)=1\Rightarrow K(x)=x+k$

Or $K(0)=F(tg0)=F(0)=0$, par suite $k=0$.

Donc $\boxed{K(x)=x};x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

*/ $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=F\left(tg\dfrac{\pi}{3}\right)=K\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}}$

*/ $F(1)=F\left(tg\dfrac{\pi}{4}\right)=K\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{F(1)=\dfrac{\pi}{4}}$

3) $x\in\square_+;U(x)=F\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

a/ $x\mapsto g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ est dérivable sur $\square_+$

et $g([0,+\infty[)=]0,1]$ .et F dérivable sur $]0,1]\subset\square_+$.

$\Rightarrow F\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ Dérivable sur $\square_+$

*/ $x\mapsto h(x)=\dfrac{x}{x+2}$ est dérivable sur

$[0,+\infty[$ et $h([0,+\infty[)=[0,1[$ .et F dérivable sur $[0,1[$

Donc $F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Conclusion :

U est dérivable sur $[0,+\infty[$

$U'(x)=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)'\times F'\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+\left(\dfrac{x}{x+2}\right)'\times F'\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)'\times f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+\left(\dfrac{x}{x+2}\right)'\times f\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

$=\dfrac{-1}{(1+x)^2}\left(\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2}\right)+\dfrac{2}{(x+2)^2}\left(\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2}\right)$

$=-\dfrac{1}{(1+x)^2+1}+\dfrac{2}{(x+2)^2+x^2}$

$=-\dfrac{1}{x^2+2x+2}+\dfrac{2}{2x^2+4x+4}$

$=-\dfrac{1}{x^2+2x+2}+\dfrac{1}{x^2+2x+2}=0\Rightarrow \boxed{U'(x)=0;x\in\square_+}$

b) On a : $U'(x)=0 \Rightarrow U(x)=cte=U(0)$

Or $U(0)=F(1)+F(0)=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}$

Donc : $\forall x\in[0,+\infty[: \boxed{U(x)=\frac{\pi}{4}}$

On a : $F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{3}\right)=U(1)=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}}$

Partie B :

$g(x)=-f(x)$

1) $f(x)=-g(x)$ donc d'après 1) partie A

$(-g(x))$ admet une unique primitive **G** sur $[0,+\infty[$ telle que $G(0)=0$.

Comme F est une primitive de $f=-g$

Alors $-F$ est une primitive de g donc $\boxed{G=-F}$

2) $T(x)=G(cotgx)$

a)*/ $x\mapsto cotgx$ est dérivable pour $x\neq k\pi$; k∈□

Donc dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$cotg\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,+\infty[$ et G dérivable sur $[0,+\infty[$.

D'où T est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

*/

$$T'(x)=(cotgx)'\times G'(cotgx)$$
$$=(cotgx)'\times g(cotgx)$$
$$=(cotgx)'\times(-f(cotgx))$$
$$=-(1+cotg^2x)\times\frac{-1}{1+cotg^2x}=1$$

Donc $T'(x)=1$

b) $T'(x)=1\Rightarrow T(x)=x+cte$

Or $T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+cte=G\left(cotg\frac{\pi}{2}\right)=G(0)=0$

$\Rightarrow cte=-\frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{T(x)=x-\frac{\pi}{2}}; \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

*/ $G(1)=G\left(cotg\frac{\pi}{4}\right)=T\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{G(1)=-\frac{\pi}{4}}$

*/ $G\left(\sqrt{3}\right)=G\left(cotg\frac{\pi}{6}\right)=T\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{G\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}}$

3) on pose $V(x)=G\left(\frac{1}{1+x}\right)+G\left(\frac{x}{x+2}\right)$, $x\in[0,+\infty[$

a) */ $x\mapsto\frac{1}{1+x}=h(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $h\left(]0,+\infty[\right)=]0,1]$ et G dérivable sur $]0,1]$. $\Rightarrow G\left(\frac{1}{1+x}\right)$ Dérivable sur $[0,+\infty[$.

*/ $x\mapsto\frac{x}{x+2}=h_1(x)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

et $h_1\left([0,+\infty[\right)=[0,1[$ et G dérivable sur $[0,1[$

Donc $G\left(\frac{x}{x+2}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Conclusion :

V est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$V'(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)'G'\left(\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{x}{x+2}\right)'G'\left(\frac{x}{x+2}\right)$$
$$=\frac{-1}{(1+x)^2}\times\left(-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\right)+\frac{2}{(x+2)^2}\times\left(\frac{-1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{(1+x)^2}\times\left(-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\right)+\frac{2}{(x+2)^2}\times\left(\frac{-1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+x)^2+1}-\frac{2}{(x+2)^2+x^2}$$
$$=\frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{2}{2x^2+4x+4}$$
$$=\frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{2}{2(x^2+2x+2)}=0 \Rightarrow V'(x)=0$$

b)

$$V(0)=G(1)+G(0)=G(1)+=-\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x)=-\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{1}{4}\right)+G\left(\frac{3}{5}\right)=V(3)=-\frac{\pi}{4}$$

Exercice 9

$$f(x)=\frac{1}{\sin x}, x\in]0,\pi[$$

1) $\sin x\neq 0$ et dérivable sur $]0,\pi[$

$\Rightarrow f$ Dérivable sur $]0,\pi[$ et $f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

$f'(x)=0\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

Le signe de f' est celui de $-\cos x$.

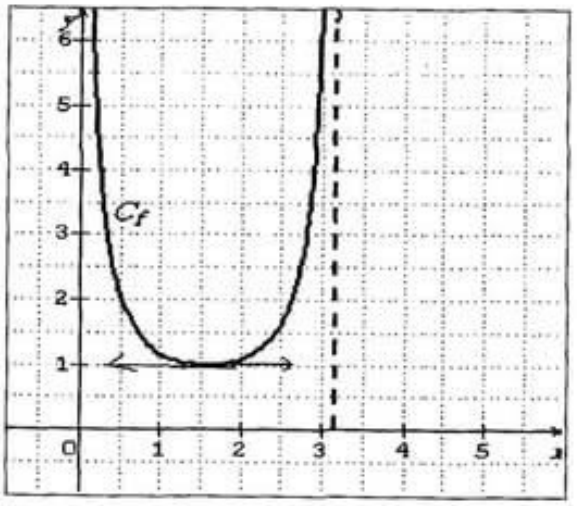
T.V :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to \pi^-}\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Courbe de f :



2) g la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$

a) g est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ donc g réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $J=g\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)=[1,+\infty[$.

b) g est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ et

$g'(x)\neq 0, \forall x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\Rightarrow g^{-1}$ Dérivable sur $]1,+\infty[$.

[g^{-1} Non dérivable a droite en 1 car $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$]

$$\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{-\frac{\cos\left(g^{-1}(x)\right)}{\sin^2\left(g^{-1}(x)\right)}}$$

$$=-\frac{\sin^2\left(g^{-1}(x)\right)}{\cos\left(g^{-1}(x)\right)}$$

Or $g\circ\left(g^{-1}\right)(x)=\frac{1}{\sin g^{-1}(x)}=x\Rightarrow \sin g^{-1}(x)=\frac{1}{x}$

Et on a : $\cos g^{-1}(x)=\sqrt{1-\sin^2 g^{-1}(x)}$

Donc : $\left(g^{-1}\right)'(x)=-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$$\left(g^{-1}\right)'(x)=-\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}=-\frac{1}{x^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$d'où : \left(g^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x\in]1,+\infty[$$

c) $K(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ est continue sur $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$

$\Rightarrow K$ admet une primitive F sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ et

$$\left(g^{-1}\right)'(x)=-K(x)\Rightarrow K(x)=-\left(g^{-1}\right)'(x)$$

Donc : $\boxed{F(x)=-g^{-1}(x)+cte}$

Exercice 10

$$U(t)=\frac{1}{2t^2-2t+1}, t\in\square$$

$$g(x)=f\left(\frac{1+tgx}{2}\right), x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

1) $x\mapsto\frac{1+tgx}{2}=V(x)$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $V\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\square$

et f est dérivable sur $\square$.

$\Rightarrow g$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2) $g'(x)=\left(\frac{1+tgx}{2}\right)'f'\left(\frac{1+tgx}{2}\right)$

$$=\left(\frac{1+tg^2x}{2}\right)\times U\left(\frac{1+tgx}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1+tg^2x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\frac{(1+tgx)^2}{4}-2\left(\frac{1+tgx}{2}\right)+1}\right)$$

$$=\frac{1+tg^2x}{1+tg^2x+2tgx-2-2tgx+2}=1$$

$\Rightarrow g(x)=x+b, b\in\square$

Donc g est une application affine (de la forme : $ax+b$)

3) $f(1)-f(0)=?$

On a $tg\frac{\pi}{4}=1$ et $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

Donc $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=f(1)$ et $g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f(0)$

$$f(1)-f(0)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)-g\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}+b\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+b\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{f(1)-f(0)=\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 11

$x\in[0,\pi]$

$f(x)=3\sin x-2\sin^3 x$

1) $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$

$$F'(x)=-a\sin x-3b\sin x\cos^2 x$$
$$=-a\sin x-3b\sin x\left(1-\sin^2 x\right)$$
$$=-a\sin x-3b\sin x+3b\sin^3 x$$
$$=-(a+3b)\sin x+3b\sin^3 x$$
$$=f(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-(a+3b)=3\\3b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3-3b=-3+2=-1\\b=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Donc : $\boxed{a=-1}$ et $\boxed{b=-\frac{2}{3}}$

D'où $F(x)=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$

2) $f(x)=3\sin x-2\sin^2 x.\sin x$

$$=3\sin x-2\left(1-\cos^2 x\right)\sin x$$
$$=3\sin x-2\sin x+2\sin x\cos^2 x$$
$$=\sin x+2\sin x\cos^2 x$$
$$=(-\cos x)'+2(-\cos x)'.\cos^2 x$$

$$\boxed{F(x)=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+cte}$$

Exercice12

$f(x)=\frac{1}{x};x\in]0,+\infty[$

1) f est continue sur $]0,+\infty[$ donc f admet une seule primitive F vérifiant : $F(1)=0$

2) F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$F'(x)=f(x)=\frac{1}{x}>0, x>0$

Donc F est strictement croissante sur $\square_+^*$

* $x>1\Rightarrow F(x)>F(1)\Rightarrow \boxed{F(x)>0}$

* $x<1\Rightarrow F(x)<F(1)\Rightarrow \boxed{F(x)<0}$

3) $F(x)=F(ax), x>0, a>0$

a/ $x\mapsto u(x)=ax$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$U(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ et F est dérivable sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow H=Fou$ est dérivable sur $\square_+^*$

On a : $H'(x)=(ax)'\times F'(ax)=a\times f(ax)$

$=\not{a}\times\frac{1}{\not{a}x}=\frac{1}{x}=f(x)$

$\Rightarrow H'(x)=f(x)\Rightarrow H$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b/ $H'(x)=f(x)$ et $(F(a)+F(x))'=f(x)$

$\Rightarrow H(x)=F(a)+F(x)+cte$

Pour $x=1$ on a :

$\square=\square\ \square$

$H(1)=F(a)+F(1)+cte=F(a)\Rightarrow cte=0$

$\Rightarrow H(x)=F(a)+F(x)$

$\Rightarrow \boxed{F(ax)=F(a)+F(x)}; x>0,\ a>0$

c) $a>0\Rightarrow\frac{1}{a}>0$

$$\begin{cases} F(\frac{a}{a})=F\left(\frac{1}{a}\times a\right)=F\left(\frac{1}{a}\right)+F(a) \\ F\left(\frac{a}{a}\right)=F(1)=0 \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{1}{a}\right)=-F(a)$$

$F(\frac{x}{a})=F\left(x\times\frac{1}{a}\right)=F(x)+F\left(\frac{1}{a}\right)=F(x)-F(a)$

Donc : $\boxed{F\left(\frac{x}{a}\right)=F(x)-F(a)}$

4)

$\left[F(-x)\right]'=(-x)'\times F'(-x)=(-1)\times f(-x)$

$=(-1)\times\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}=g(x)$

et $F(-(-1))=f(1)=0$

Donc $F(-x)$ est une primitive de g sur $]-\infty,0[$ qui s'annule en -1.

Exercice13

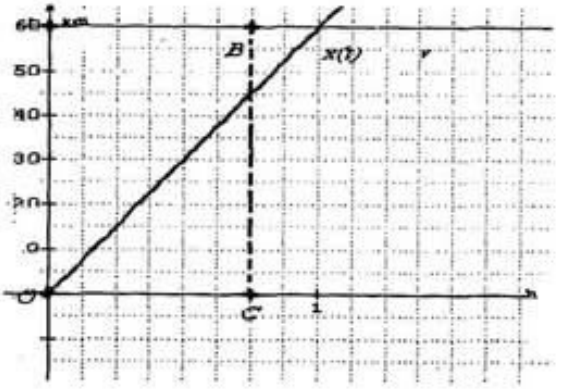
a) $V=60km/h$

$2h45mn=165mm$

$x=V\times t=165km$

b) $x(t)=V\times t=60t$

c) Courbe $x(t)$ et v :



d) A : aire du rectangle $OABC$.

$A(t)=60t$ (Unité d'aire) $=60t\times 4.cm^2$

$\boxed{A(t)=240t\,cm^2}$

$\Rightarrow \boxed{A(t)=4x(t)\,cm^2}$